

科技部補助專題研究計畫成果報告

(期中進度報告/期末報告)

(計畫名稱)

近似演算法求解退化性工作考慮資源配置與限制之多機台排程問題研

究(I)

計畫類別：個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：MOST 102-2221-E-252-007-

執行期間：102年8月1日至103年7月31日

執行機構及系所：南開科技大學工業工程與管理系

計畫主持人：許洲榮

共同主持人：

計畫參與人員：白佳敏、徐華鋒、蔡家萍

本計畫除繳交成果報告外，另含下列出國報告，共_壹_份：

移地研究心得報告

出席國際學術會議心得報告

國際合作研究計畫國外研究報告

處理方式：除列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權，一年二年後可公開查詢

中 華 民 國 103 年 9 月 20 日

科技部補助專題研究計畫成果報告

(中文計畫名稱)

近似演算法求解退化性工作考慮資源配置與限制之多機台排程問題研

究(I)

(英文計畫名稱)

Approximation schemes for multi-machine scheduling problems with deteriorating jobs and resource-dependent processing time.

一、中文摘要

大部份確定性的生產排程問題研究，都假設工作的處理時間是已知的固定值，然而，實務上有很多情況卻不是這樣，工作一旦被耽擱或較慢處理，它的加工處理時間會變得比預定時間還長，這種現象稱為退化效應 (Deterioration effects)。Kunnathur 和 Gupta[23]指出許多日常生活上的例子來說明退化現象，例如延遲的機器維修與清理時間、火災中滅火時間、急診室中病患的處理時間以及鋼鐵生產過程中的紅鐵鑄塊在經紅火軋鋼機加工軋型前的加熱時間，這些工作的共同特性是越慢處理，工作所需的處理時間越長。因此，深入研究工作加工時間可變的排程問題，對於實際問題的解決具有重要的意義。

針對工作的退化效應，加入資源以改變處理時間，用來提高效率以優化排程目標是很自然而合理的做法，然而，實務上資源也是有限制的，因此，本計畫將探討退化性工作考慮資源配置與限制之多機台 (Multi-machine) 排程問題，包括平行機台 (Parallel-machine models)、流程式工廠 (Flow shops) 和零工式工廠 (Job shops)，我將證明

每一個問題的目標函數 (Objectives) 都是 NP-hard，並依其分類是 MAX SNP-hard、NP-hard in the strong sense 或 NP-hard in the ordinary sense 設計近似演算法 (Approximation algorithm)。對於 MAX SNP-hard 問題，嘗試設計 k 因數近似演算法 (k -approximation algorithm)，對於 NP-hard in the strong sense 問題，嘗試設計多項式時間近似方案 (Polynomial time approximation scheme)，如果問題是 NP-hard in the ordinary sense，則考慮設計全多項式時間近似方案 (Fully polynomial time approximation scheme)。這類問題的研究一方面可以豐富排程問題以及組合最佳化的理論成果，另一方面可以為解決實際問題提供切實可行的有效方法。

關鍵詞：排程、平行機台、退化性工作、資源配置、近似演算法

Abstract

Most of the studies related to producing schedule regard the processing time as a fixed value. However, reality oftentimes contradicts to the theory. When a job is delayed, the processing time will last longer than the expected one. This is what the scholar termed "deterioration effects". Kunnathur and

Gupta[23] pointed out several real-life situations in which deteriorating jobs might occur. These include shops with deteriorating machines, and/or delay of maintenance or cleaning, fire fighting, hospital emergency wards and steel rolling mills. The common characteristic among these jobs is that the slower the managing is, the longer will the job take. Therefore, to explore deeply the issue concerning the job scheduling is critically meaningful in solving the actual problems.

To pinpoint the deterioration effects, adding resources to change the processing time or promote the efficiency to excel the objective of the schedule is a very reasonable method. Hence, our study will mainly aim to discuss the problems derived from the deterioration effects, allocation of the resources and the scheduling of the parallel-machine. Moreover, we will demonstrate the polynomial time algorithm regard to P question. About NP-hard question, we will also demonstrate approximation algorithm according to MAX SNP-hard、NP-hard in the strong sense, or NP-hard in the ordinary sense. As to the MAX SNP-hard question, we will try k -approximation algorithm. To NP-hard in the strong sense, we will try polynomial time approximation scheme. If we face question such as NP-hard in the ordinary sense, we will design a fully polynomial time approximation scheme. All in all, this research will increase the theory results in terms of scheduling problem; it will also solve the actual problem in a practical and feasible way.

Keywords: Scheduling; Parallel-machine; Deteriorating job; Resource allocation; Approximation algorithm

二、前言

排程問題也稱為調度問題，是組合最佳化中的一個重要分支。排程問題最早起源於機器製造業，現在已逐漸發展成為運籌學、系統科學、控制科學、管理科學和電腦科學等多個學科領域，廣泛應用於工程技術和經濟管理的各個領域。排程作為一門應用科學，它在作業安排、製造工廠的最佳設計、交通樞紐的調度及工程進度的控制等方面有著深刻的實際背景和廣闊的應用前景。

在確定性的生產排程問題研究中，都視工作的處理時間是事先知道而且固定，但在許多實際問題中，工作的加工時間可能與其開工時間和(或)所安排的加工順序有著某種關聯，由此產生一些新型排程問題。這類問題在鋼鐵工業、塑膠工業、軍事、消防以及醫療等方面有著廣泛的應用。如在軍事方面，當天氣漸漸變壞或者天色漸漸變暗時，探測目標開始的時間越晚則所花費的時間就越長；在消防工程中，救火的開始時間一旦被耽擱，火勢就會難以控制，這樣救火的時間將會變長，所付出的代價也會變大；在醫療方面，病人的療程越早開始，病情惡化的機會越小，所需治癒的時間就越少。由於工作加工時間可變的新型排程問題有著深刻的實際背景與廣闊的應用前景，因此，深入研究工作加工時間可變的新型排程問題，對於排程理論的發展與實際問題的解決都具有重要的意義。

六十幾年來，研究者陸續不斷的提出或改善生產模型，使它更符合實際之生產環境的需要，其中包括考慮人的學習和疲勞效應(Learning and fatigue effects)、機器刀具的老化效應(Aging effects)以及工作的退化效應(Deteriorating effects)。針對工作的退化效應，加入資源以改變處理時間是很自然的做法，然而幾十年來，大部份關於退化性工作排程問題的研究都沒有考慮使用資源配置與限制問題，Janiak[18]是少數考慮使用資源配

置與限制的研究先驅之一，之後，也只有少數的學者研究此議題[6, 15, 16, 37, 46-48]。

三、研究目的與問題描述

排程問題是一類重要的組合最佳化問題，大多數排程問題是 NP-hard 問題，在 $P \neq NP$ 假設下，NP-hard 問題沒有多項式時間精確演算法。考慮到實際問題的需要，對於 NP-hard 問題通常是設計有效的近似演算法以得到近似解。近似演算法主要分為 k 因數近似演算法 (k -approximation algorithm)、多項式時間近似方案 (Polynomial time approximation scheme, PTAS, for short) 和全多項式時間近似方案 (Fully polynomial time approximation scheme, FPTAS, for short)。從計算複雜性角度，排程問題可以分為有多項式時間精確演算法的 P 問題和沒有多項式時間精確演算法的 NP-hard 問題。NP-hard 問題中有一類重要問題，稱為 MAX SNP-hard，在 $P \neq NP$ 假設下，MAX SNP-hard 問題沒有 PTAS。

前面提到關於退化性工作考慮資源配置與限制排程問題的研究，大多數集中在對於 P 問題設計出多項式時間精確演算法，或者對 NP-hard 問題設計啟發式演算法 (Heuristic algorithm) 或分枝界限法 (Branch & bound method) 求解，對於問題是否是 MAX SNP-hard 的則很少考慮。從演算法設計角度，MAX SNP-hard 問題的近似演算法的設計還有許多工作需要研究，值得深入探討，然而，就申請者能力所能蒐集到的文獻中，到西元 2011 年為止，尚未有利用近似演算法求解退化性工作考慮資源配置與限制的論文在期刊發表。

所以，本計畫將探討退化性工作考慮資源配置與限制之平行機台排程問題，對於 P 問題則設計出多項式時間精確演算法，NP-hard 問題則依分類是 MAX SNP-hard、NP-hard in the strong sense 或 NP-hard in the ordinary sense 設計近似演算法。對於 MAX SNP-hard 問題，嘗試設計 k 因數近似演算法，對於 NP-hard in the strong sense 問題，嘗試設計 PTAS，如果問題是 NP-hard in the

ordinary sense，則考慮設計 FPTAS。這類問題的研究一方面可以豐富排程問題以及組合最佳化的理論成果，另一方面可以為解決實際問題提供切實可行的有效方法。

假設有 n 個退化性工作 $J = \{1, 2, \dots, n\}$ 在 m 部機台處理 $M \in \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ (一般情況下 $m < n$)， O_{ij} 表示工作 j 在機台 i 上加工， $i = 1, 2, \dots, m$ 和 $j = 1, 2, \dots, n$ 。令 p_{ij} 表示工作 j 在機台 i 上的正常加工時間 (Basic processing time)、 u_{ij} 表示配置給作業 O_{ij} 的資源分配量 (它是非遞增函數)、 \bar{u}_{ij} 表示可以配置給作業 O_{ij} 的最大資源分配量、 a_{ij} 表示工作 j 在機台 i 上的退化率 ($a_{ij} \geq 0$)、 b_{ij} 表示工作 j 在機台 i 上的壓縮率和 v_{ij} 表示每單位資源配置給作業 O_{ij} 的成本， $i = 1, 2, \dots, m$ 和 $j = 1, 2, \dots, n$ 。本研究考慮工作真實的處理時間 (Actual processing time) 是線性的資源消耗函數 (Linear resource consumption function)：

$$p_{ijr} = p_{ij} r^{a_{ij}} - b_{ij} u_{ij}, \quad r = 1, 2, \dots, n_j,$$

$$0 \leq u_{ij} \leq \bar{u}_{ij} < p_{ij} / b_{ij}$$

其中 r 是工作 j 排在機台 i 的第 r 個位置。

考慮到能夠額外投入資源的有限性與非再生性 (Non-renewable)，所以，主要研究的排程目標有：1. 在最大完工時間小於等於上界值 K 的條件下，總額外投入的資源成本最小化；2. 在總額外投入的資源成本小於等於上界值 U 的條件下，最大完工時間最小化。

因此，採用 Graham 等作者 [11] 所提出的三欄符號 (Three-field notation) 表示法，本研究計畫所要探討的排程問題分別為：

第一年 (102 年 8 月至 103 年 7 月)

我首先探討等效 (Identical) 平行機台情況，然後，嘗試推廣到非等效 (Unrelated) 平行機台情況，因此，本年度所要探討的排程問題為：

$$Pm | p_{ijr} = p_{ij} r^{a_{ij}} - b_{ij} u_{ij}, C_{\max} \leq K | \sum_{j=1}^n v_j u_j,$$

$$Pm | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij}, \sum_{j=1}^n v_j u_j \leq U | C_{\max},$$

$$Pm | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij} | C_{\max} + \sum_{j=1}^n v_j u_j$$

或/和

$$Rm | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij} | C_{\max} + \sum_{j=1}^n v_j u_j。$$

第二年 (103 年 8 月至 104 年 7 月)

$$F2 | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij}, C_{\max} \leq K | \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n v_{ij} u_{ij}$$

和

$$F2 | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij}, \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n v_{ij} u_{ij} \leq U | C_{\max}$$

。

第三年 (104 年 8 月至 105 年 7 月) :

$$Jm | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij}, C_{\max} \leq K | \sum_{j=1}^n v_j u_j \text{ 和}$$

$$Jm | p_{ijr} = p_{ij}r^{a_{ij}} - b_{ij}u_{ij}, \sum_{j=1}^n v_j u_j \leq U | C_{\max}。$$

四、文獻探討

早在二、三十年前，蘇聯及東歐國家的研究者就開始探討工作的處理時間會隨著工作的加工順序或外在環境而變動[34]，退化性工作的排程問題(Deterioration job scheduling problems)，是由Browne 和Yechiali[3]提出，他們主要是針對工作的加工時間(Job processing time)會隨著等待安排上機處理的時間拉長，而使得它的實際加工時間亦隨之變長。同時間Kunnathur和Gupta [23]的研究也把較慢處理工作的處理時間加上變動的懲罰值，一般都認為以上之研究者是最早提出退化性工作排程問題的先驅。之後，跟退化性工作排程問題有關的研究如雨後春筍般的出現，Mosheiov[28]考慮Browne和Yechiali[3]所提模型的特例，稱為簡單線性退化(Simple linear deterioration)，分別針對最大完工時間(Makespan)、總完工時間(Total completion

time)、總權重完工時間(Total weighted completion time)、最大差異(Maximum lateness)、最大延誤(Maximum tardiness)以及最少延誤工作數(Minimum the number of tardy jobs)提出多項式時間演算法求解這些問題。Mosheiov[29, 30]更考慮到Λ-型策略和多機退化性工作的排程問題。Cheng 和Ding[7]則考慮一階梯式退化模型，若其工作未能在一定日期前完成的話，則加工時間呈階梯式之成長。Kononov和Gawiejnowicz[21]證明在工作處理時間為線性退化之條件下，雙機流程工廠和雙機開放工廠的最大完工時間最小化是一個難解之問題(NP-hard)。Bachman等作者[2]證明若處理時間為起始時間之線性函數時，單機總完工時間之加權平均最小化是一個難解之問題(NP-hard)。Ng等作者[31]則在單機總完工時間最小化之研究，考慮三種不同之退化函數。Voutsinas和Pappis[36]考慮指數型退化模型。Wu和Lee[42]探討單機簡單線性退化工作最大完工時間最小化排程問題，考慮工作可分割處理(Resumable)而且在加工過程中有一段時間機器不能加工(Unavailability)，他們提出0-1整數規劃求最佳解。Ji等作者[19]在工作不可分割處理(Non-resumable)的假設下，探討Wu和Lee[42]所提的問題，並證明最大完工時間和總完工時間最小化問題都是一個難解之問題(NP-hard)。Chen[5]證明平行機簡單線性退化工作總完工時間最小化問題是一個難解之問題(NP-hard)，之後，Ji和Cheng[20]針對此問題在等效平行機生產環境，提出全多項式時間近似方案求解，這是一個十年來未解決的公開問題。Lee[25]考慮流程式退化性工作生產排程問題，並提出啟發式演算法求解最大完工時間、總完工時間最小化排程問題以及在加上限制條件下提出多項式時間演算法。Oron[32]和Layegh等作者[24]分別探討單機簡單線性退化與階梯退化工作總完工時間差異及總完工時間加權最小化問題。Lee等作者[26]探討單機簡單一般退化性工作最大完工

時間最小化排程問題。Cheng等作者[10]同時考慮學習與退化效應之單機排程，提出多項式時間演算法求解最大完工時間及總完工時間最小化問題。Low等作者[27]探討單機簡單線性退化工作最大完工時間最小化排程問題，考慮工作不可分割處理(Non-resumable)而且在加工過程中有一段時間機器不能加工(Unavailability)，並考慮在機台恢復可使用狀態，所有尚未處理工作的處理時間必須重新退化(Re-start)，他們證明此問題是一個難解之問題(NP-hard)，並提出0-1整數規劃以及啟發式演算法求最佳解及近似解，這個生產模型很適合金屬加工製造業的生產模式(如冷拉(Cold drawing)、冷壓(Cold pressing)、冷成形(Cold forming)、冷擠伸(Cold extrusion)、和金屬成形製程(Metal forming process)等金屬加工製造業常使用的製程)，之後，一系列探討退化性工作與機器使用受限制(Unavailability)的研究，開始參考這篇研究所提重新退化的概念。Wu等作者[43]考慮單機退化性工作與整備時間群排程(Group scheduling)問題，提出多項式時間演算法求解最大完工時間(Makespan)、總完工時間(Total completion time)最小化問題。Wu等作者[44]考慮單機退化性工作問題，提出分枝界限法和兩個啟發式演算法求解最大完工時間(Makespan)最小化問題。Wang等作者[38]探討單機簡單線性退化工作群生產排程(Group scheduling)問題，提出多項式時間演算法求解最大完工時間及總完工時間加權最小化問題。Wang等作者[39, 40]同時考慮單機學習與退化工作生產排程問題，提出多項式時間演算法求解到期日指派、最大完工時間、總完工時間加權及總完工時間 k 次方最小化問題。Cheng等人[9]探討退化性工作可選擇維修之平行機問題，證明總完工時間的目標下，可以在多項式時間求得最佳解。Hsu等人[17]推導線性退化工作到期日指派和可選擇維修單機排程問題，在總提前、延遲和到期日成本最小化的目標下，可以在多項式時間

求得最佳解。Cheng等人[8]提供這系列相關研究論文的調查報告，以上概略敘述這十幾年來關於退化工作排程問題所發表的論文。

Janiak[18]的研究是考慮使用資源配置與限制的研究先驅之一，之後，Cheng和Janiak[6]考慮單機使用資源配置與限制生產排程問題，提出多項式時間演算法求解在總使用資源最少條件下之最大完工時間最小化，以及在最大完工時間最小化條件下之總使用資源最少等問題。Yang等作者[46]、Zhao和Tang [47]以及Zhu等作者[49]追隨Cheng和Janiak[6]分別探討單機具有退化與學習工作群體排程問題、單機具有退化性工作排程問題、單機比例退化性工作排程問題，在總使用資源最少條件下之最大完工時間最小化，以及在最大完工時間最小化條件下之總使用資源最少等目標，也分別推導證明所提的問題可以在多項式時間求得最佳解。Wang等作者[37]考慮單機學習或退化工作具有資源相依排程問題，分別探討1.最大完工時間最小化、總完工時間、絕對總完工時間差以及總使用資源等4項成本和最小化目標，2.在最大完工時間最小化、總等待時間、絕對總等待時間差以及總使用資源等4項成本和最小化目標，在線性的資源消耗函數或凸的資源消耗函數模式下都可以在多項式時間求得最佳解。Zhao and Tang [47]研究單機退化性工作生產排程問題，證明最大完工最小化、總完工時間、總完工時間絕對差異、總提前、延遲和到期日成本最小化、沒有延遲工作的條件下總提前完工成本最小化、總資源使用限制下最大完工最小化和最大完工最小化限制下總資源使用最少等問題都可以多項式時間求得最佳解。Hsu和Yang[16]探討非等效平行機台考慮位置相關退化性工作與資源配置與限制排程問題，證明總提前完工、總延後完工和總投入資源成本最小和機台總負荷、總完工時間、總完工時間差異和總投入資源成本各權重和最小等問題都可以多項式時間求得最佳解。Hsu[15]探討退化性工作考慮共同

到期日(Common due date)指派和鬆弛的到期日(Slack due date)指派單機排程問題，證明總位置權重提早或延遲成本、總投入資源成本和總到期日成本最小化問題都可以多項式時間求得最佳解。總而言之，上述學者研究的問題都屬於P問題。

針對工作的退化效應，考慮加入資源以改變處理時間，用來提高效率以達最佳化排程目標是很自然而合理的做法，然而，就申請者能力所能蒐集到的文獻中，到西元2012年為止，尚未有利用近似演算法求解退化性工作考慮資源配置與限制的多機台排程問題論文在期刊發表。

對於 k 因數近似演算法的設計，常用的方法有兩種，一種是利用組合最佳化方法，根據問題的性質，進行具體分析，設計近似演算法。另一種方法是利用線性規劃鬆弛所討論的排程問題，通過求解線性規劃得到近似演算法。近年來，半定規劃(Semi-definite programming)[35]的研究和應用發展迅速，已成為數學規劃研究的一個新領域。Skutella[33]首先將半定規劃方法引入到排程問題的研究中，利用半定規劃鬆弛得到了平行機極小化加權完工時間和問題的 k 因數近似演算法。Yang等[45]和Chen和Zhang[4]利用半定規劃鬆弛研究了機器能力受限平行機排程問題和單機可控的處理時間排程問題的近似演算法。

對於PTAS和FPTAS的設計通常是通過對某個擬多項式(或指數)精確演算法的輸入、運行或輸出加以改進，使其既可以得到與最佳解充分接近的近似最佳解，又可使演算法的計算複雜性減小，從而得到PTAS或FPTAS。常用的方法有輸入資料的捨入(Rounding-the-input-data)、比率劃分(Ratio partitioning)、時間劃分(Time partitioning)和刪減狀態空間(Trimming-the-state-space)等，Afrati和Milis[1]對此做了介紹。這些方法通常需要先求出最佳解的上界和下界。Kovalyov和Kubiak[22]提出一種設計FPTAS的新方法，這一方法的最大優點是不需要先求出最佳解的上下界。近年來，已有

學者採用Kovalyov和Kubiak的方法處理某些排程問題。可以預見，Kovalyov和Kubiak的方法將會在排程問題的FPTAS設計方面提供新途徑，發揮強有力的作用。

對於一個具體的NP-hard問題，設計一個近似演算法固然重要，而證明其不存在某類近似演算法同樣重要。在已有的研究中，這方面的論文相對較少。在 $P \neq NP$ 假設下，MAX SNP-hard問題不存在PTAS，甚至可能不存在 k 屬於某個範圍的 k 因數近似演算法。因此，證明一個問題是MAX SNP-hard，在一定程度上可以對某類近似演算法的存在性給出否定的結論。證明一個問題是否為MAX SNP-hard需要用到L-簡化(L-reduction)。因為L-簡化保持問題的可近似性質(Approximability behavior)，所以可以利用L-簡化理論對PTAS和某些 k 因數近似演算法的存在性給出肯定或否定的結論。Hoogeveen[13]等利用L-簡化證明了幾類最小化完工時間和的平行機排程問題是MAX SNP-hard。Williamson[41]等討論了三台機器的流程式作業，自由作業和異序作業問題。對於最小化最大完工時間問題，證明了不存在 $k < 7/6$ 的 k 因數近似演算法。

在目前的文獻中，儘管已有利用半定規劃設計 k 因數近似演算法，利用L-簡化證明問題是MAX SNP-hard，但是，已經發表的論文還是相對的少。半定規劃在其它最佳化問題中已有很多應用，取得了很好的成果，例如：鈔票辨識和車牌辨識。L-簡化理論也逐漸被應用於其他組合最佳化問題中，討論近似演算法的不存在性，作為一種強有力的工具，正在顯示出其廣泛的應用前景。可以預見，在未來的排程問題研究中，半定規劃和L-簡化理論必將發揮其強大作用。

本計畫的特色：在 k 因數近似演算法的設計上利用半定規劃做為所討論問題的鬆弛是一個特色。此外，儘管L-簡化是組合最佳化中的一個強有力的工具，但由於L-簡化不易構造，目前應用較少。L-簡化理論既可以用來證明問題MAX SNP-hard，也可以用來構造近似演算法。目前排程文獻中只有很少的文章利用L-簡化理論證明問題是MAX SNP-hard，就申請者能力所能蒐集到的文獻中，還沒有見到用L-簡化理論設計近似演算法求解退化性工作考慮資源配置與限制的研

究成果發表，利用 L-簡化討論近似演算法的存在性也是本項目的另一個特色。

創新之處：對於排程問題，目前已有文獻中處理的方法依然是排程或組合最佳化中的經典方法，從思想、概念和方法角度，嘗試用半定規劃和 L-簡化理論研究排程問題是有意義的創新工作。在以往的排程問題研究中，判斷一個 NP-hard 問題是否為 MAX SNP-hard 的研究相對較少，這方面的研究從某種角度也是一種創新。此外，本項目研究的是新問題，因此對於任何一類問題給出有效的解決方法或明確的計算複雜性分類也都是一項創新工作。

五、研究方法與進行步驟

在一般情況下，排程問題的求解方法有以下幾種方式：1.排程問題性質之推導(Scheduling theory)、2.多項式時間下之最佳演算法(Polynomial time algorithm)、3.分枝與界限法(Branch & bound method)、4.動態規劃法(Dynamic programming)、5.整數規劃模式(Integer programming)、6.啟發式演算法(Heuristic method)等。其中方法 3-6 的適用性，均架構在計算理論下的複雜度分析(Complexity analysis)為依據。

所以針對所提出排程問題，首先推導是否可以得到多項式時間下之最佳演算法？萬一無法推導得到多項式時間下之最佳演算法(Polynomial time algorithm)，將試著推導是否有虛擬多項式時間演算法(Pseudo polynomial time algorithm)或證明此問題是NP-hard的問題，並依此設計啟發式演算法或應用萬用演算法(Meta-heuristic Algorithms)來求取近似解並做誤差界限分析或設計PTAS、FTPAS近似演算法。

在證明問題 MAX SNP-hard 方面，主要考慮利用 L-簡化對近似演算法的存在性給出肯定或否定的結論。對於 MAX SNP-hard 問題，將嘗試設計 k 因數近似演算法，一般對於 k 因數近似演算法的設計，常用的方法有兩種，一種是利用組合最佳化方法，根據問題的性質，進行具體分析，設計近似演算法。

另一種方法是利用線性規劃鬆弛所討論的排程問題，透過求解線性規劃得到近似演算法。近年來，半定規劃的研究和應用發展迅速，已成為數學規劃研究的一個新領域。由於半定規劃是線性規劃的推廣，半定規劃鬆弛可以得到具有更好性能比的近似演算法。對於 PTAS 的設計，則利用輸入資料的捨入、比率劃分、時間劃分和刪減狀態空間等方法。對於 FPTAS 的設計，則主要借鏡 Kovalyov 和 Kubiak[22] 提出的新方法。由於這一方法不要求最佳解的上下界，所以可以使處理問題的範圍更廣泛。隨著排程問題、半定規劃和 L-簡化理論等問題的深入研究，將有許多問題有待於解決，這些問題必將受到國內外學者的重視。這類問題的研究一方面可以豐富排程問題以及組合最佳化的理論成果，另一方面可以為解決實際問題提供切實可行的有效方法。

六、研究成果與討論

本計畫提出兩個創新的退化性工作處理時間結合資源消耗函數模型，推到證明所提出的問題(1)-(3)在等效平行機生產環境都是 NP-hard in the strong sense 問題，參考借鏡 Hromkovic[14] 書中介紹的方法和借鏡 Hochbaum和Symoys[12] 論文的解法，分別對問題(1)-(3)設計多項式時間近似方案(Polynomial time approximation scheme, PTAS for short)求解中。後面是設計三個 PTAS 的主要做法：一個 PTAS 求解 NP-hard 最小化優化問題，亦即給定一個多項式時間演算法，針對求解問題，任意給定一個值 $\varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$ 和實例(Instance)，將實例帶入此多項式時間演算法求得的解是在該實例最佳解的 $(1 + \varepsilon)$ 倍以內。對於工作的處理時間和成本為確定，等效平行機生產環境，目標函數為最大完工時間最小化，Hochbaum 和 Shmoys[12] 已經提出一個 $(1 + \varepsilon)$ 近似演算法。因為問題(1)-(3)都有無窮多組實例，因此，必須各設計一個篩選機制：將無窮多組實例轉變成多項式大小的實例集合 S ，而且

集合 S 中必須確定存在一個實例，利用 Hochbaum 和 Shmoys[12] 的方法求得的解是在該實例最佳解的 $(1+\varepsilon)$ 倍以內，PTAS 就設計完成，論文還在整理撰寫階段。

我們也針對退化性工作，考慮單機選擇性多重維修，提出一個新的恢復函數 (Recovery function) 模型，目標函數是最大完工時間最小化排程問題，證明此問題可以多項式時間演算法求解；考慮非等效平行機台退化性維修模型的生產排程問題，目標函數是總流程時間最小化排程問題，推導證明問題是確定性多項式時間下可以求解的問題；針對單機生產環境、考慮工作具有學習與退化效應和新訂單到達之重新排程問題提出有效的解法。一般的生產排程都是幾星期前或是幾天前已經排定，假設在開始加工以前，又有新的訂單到達，排程的目標有二：(1) 原排程的工件中斷數小於等於 K 的條件下，總流程時間最小化；(2) 原排程的個別工件中斷時間小於等於 K 的條件下，總流程時間最小化。證明這個問題可以在比重新排程較小的多項式時間下求得最佳解。我們分別寫成三篇論文投稿，兩篇發表在 SCI 期刊以及一篇發表在 EI 期刊。

七、計畫成果自評

本計畫探討退化性工作考慮資源配置與限制之平行機台排程問題，申請三年期研究計畫，審核通過一年。針對第一年的計畫內容撰寫成三篇相關論文，已經發表兩篇 SCI 期刊論文和一篇 EI 期刊論文，另外，一篇主要研究論文正在撰寫準備投稿，因此，大致上與原計劃是吻合。論文發表詳細資料如下：

1. Chou-Jung Hsu, Min Ji, Jia-Yuarn Guo, Dar-Li Yang (2013). Unrelated parallel-machine scheduling problems with aging effects and deteriorating maintenance activities. *Information Sciences*, 253, 163-169. [SCI; IF: 3.893; Rank: 8/135].
2. Chou-Jung Hsu (2014). Single-machine

scheduling with aging effects and optional maintenance activity considerations. *Mathematical Problems in Engineering*. (Open Access) [SCI; IF: 1.082; Rank: 33/87;]

3. Chia-Min Pai (學生), Yu-Ling Liu, Chou-Jung Hsu* (2014). Single-machine rescheduling of new orders with learning and deterioration effects consideration, *Advanced Materials Research*. Vols. 565, pp. 198-204. [EI]

本研究計畫共有三位學生參與，兩位碩士班學生(白佳敏和徐華鋒)，已經在臺中磯鑫公司擔任生產管理相關工作，一位大學部學生(蔡家萍)學習到生產排程知識，畢業後可以從事生管工作或繼續就讀研究所。

另外，主持人非常感謝科技部的補助，讓我們有經費建置研究與系統模擬環境以及參加國際研討會與各國學者交流。

八、參考文獻

1. Afrati, F. and I. Milis, "Designing PTASs for MIN-SUM scheduling problems," *Discrete Applied Mathematics*, 154, 622-639, (2006).
2. Bachman, A., T.C.E., Cheng, A., Janiak and C.T. Ng, "Scheduling start time dependent jobs to minimize the total weighted completion time," *Journal of the Operational Research Society*, 53, 688-693, (2002).
3. Browne, S., and U. Yechiali, "Scheduling deteriorating jobs on a single processor," *Operations Research*, 38, 495-498, (1990).
4. Chen, F., and L.S. Zhang, "Semidefinite relaxation algorithm for single machine scheduling with controllable processing times," 數學年刊B輯(英文版), 153-158, (2005).
5. Chen, Z.L., "Parallel machine scheduling

- with time dependent processing times,” *Discrete Applied Mathematics*, 70, 81-93, (1996).
6. Cheng, T.C.E. and A. Janiak, “Resource optimal control in some single-machine scheduling problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 1243-1246, (1994).
 7. Cheng, T.C.E. and Q. Ding, “Single machine scheduling with step-deteriorating processing times,” *European Journal of Operational Research*, 134, 623-630, (2001).
 8. Cheng, T. C. E., Q. Ding and B. M. T. Lin, “A concise survey of scheduling with time-dependent processing times,” *European Journal of Operational Research*, 152, 1-13, (2004).
 9. Cheng, T.C.E., C.J., Hsu and D.L. Yang, “Unrelated parallel-machine scheduling with deteriorating maintenance activities,” *Computers & Industrial Engineering*, 60, 602-605, (2011).
 10. Cheng, T.C.E., C.C., Wu and W.C. Lee, “Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects,” *Computers & Industrial Engineering*, 54, 972-982, (2008).
 11. Graham, R.L., E.L., Lawler, J.K., Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan, “Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey,” *Annals of Discrete Mathematics*, 5, 287-326, (1979).
 12. Hochbaum D. and D. Shmoys, “Using dual approximation algorithms for scheduling problems: theoretical and practical results,” *Journal of the ACM*, 34,144-62, (1987).
 13. Hoogeveen, J.A., P., Schuurman, and G.J. Woeginger, “Non-approximability results for scheduling problems with minsum criteria,” *INFORMS Journal on Computing*, 13, 157-168, (2001).
 14. Hromkovic, J., “Algorithmics for hard problems: Introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics,” Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2010).
 15. Hsu, C.J., “Scheduling to a common due date on unrelated parallel-machine with deteriorating jobs,” *Advanced Materials Research*, 605-607, 521-527, (2013).
 16. Hsu, C.J. and D.L. Yang, “Unrelated parallel-machine scheduling with position-dependent deteriorating jobs and resource-dependent processing time,” *Optimization Letters*. (2013).
 17. Hsu, C.J., S.J., Yang and D.L. Yang, “Due-date assignment and optional maintenance activity scheduling problem with linear deteriorating jobs,” *Journal of Marine Science and Technology*, 19, 97-100, (2011).
 18. Janiak, A., “Time-optimal control in a single machine problems with resource constraints,” *Automatica*, 22, 745-747, (1986).
 19. Ji, M., Y., He and T.C.E. Cheng, “Scheduling linear deteriorating jobs with an availability constraint on a single machine,” *Theoretical Computer Science*, 362, 115-126, (2006).
 20. Ji, M. and T.C.E. Cheng, “Parallel-machine scheduling with simple linear deterioration to minimize total completion time,” *European Journal of Operational Research*, 188, 342-347, (2008).
 21. Kononov, A., and S. Gawiejnowicz, “NP-hard cases in scheduling deteriorating

- jobs on dedicated machines,” *Journal of the Operational Research Society*, 52, 708-717, (2001).
22. Kovalyov, M.Y., and W. Kubiak, “A fully polynomial approximation scheme for the weighted earliness-tardiness problem,” *Operations Research*, 47, 757-761, (1999).
 23. Kunnathur, A.S. and S.K. Gupta, “Minimizing the makespan with late start penalties added to processing times in a single facility scheduling problem,” *European Journal of Operational Research*, 47, 56-64, (1990).
 24. Layegh, J., F., Jolai and M.S. Amalnik, “A memetic algorithm for minimizing the total weighted completion time on a single machine under step-deterioration,” *Advances in Engineering Software*, 40, 1074-1077, (2009).
 25. Lee, W.C., C.C., Wu, Y.H., Chung and H.C. Liu, "Minimizing the total completion time in permutation flow shop with machine-dependent job deterioration rates," *Computers and Operations Research*, 36, 2111-2121, (2009).
 26. Lee, W.C., C.C., Wu and H.C. Liu, "A note on single-machine makespan problem with general deteriorating function," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 40, 1052-1056, (2009).
 27. Low, C., C.J., Hsu and C.T. Su, “Minimizing the makespan with an availability constraint on a single machine under simple linear deterioration,” *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 257-265, (2008).
 28. Mosheiov, G., “Scheduling deteriorating jobs under simple linear deterioration,” *Computers and Operations Research*, 21, 653-659, (1994).
 29. Mosheiov, G., “ Λ -shaped policies for schedule deteriorating jobs,” *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1184-1191, (1996).
 30. Mosheiov, G., “Multi-machine scheduling with linear deterioration,” *INFOR*, 36, 205-214, (1998).
 31. Ng, C.T., T.C.E., Cheng and A. Bachman, “Three scheduling problems with deteriorating jobs to minimize the total completion time,” *Information Processing Letters*, 81(6), 327-333, (2002).
 32. Oron, D., “Single machine scheduling with simple linear deterioration to minimize total absolute deviation of completion times,” *Computers & Operations Research*, 35, 2071- 2078, (2008).
 33. Skutella, M., “Convex quadratic and semidefinite programming relaxations in scheduling,” *Journal of the ACM*, 48, 206-242, (2001).
 34. Slotnick, S. A. and M. J. Sobel, “Manufacturing lead-time rules: Customer retention versus tardiness Costs,” *European Journal of Operational Research*, 169, 825-856, (2005).
 35. Vandenberghe, L. and S. Boyd, “Semidefinite programming,” *SIAM Review*, 38, 49-95, (1996).
 36. Voutsinas, T.G., and C.P. Pappis, “Scheduling jobs with values exponentially deteriorating over time,” *International Journal of Production Economics*, 79, 163-169, (2002).
 37. Wang, D., M.-Z., Wang and J.-B. Wang, “Single-machine scheduling with learning effect and resource-dependent processing times,” *Computers & Industrial Engineering*, 59, 458-462, (2010).

38. Wang, J.B., L., Lin and F. Shan, "Single-machine group scheduling problems with deteriorating jobs," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39, 808-812, (2008).
39. Wang, J.B. and Q. Guo, "A due-date assignment problem with learning effect and deteriorating jobs," *Applied Mathematical Modelling*, 34, 309-313, (2010).
40. Wang, J.B., X., Huang, X.Y., Wang, N., Yin and L.Y. Wang, "Learning effect and deteriorating jobs in the single machine scheduling problems," *Applied Mathematical Modelling*, 33, 3848-3853, (2009).
41. Williamson, D.P., Hall, L.A., Hoogeveen, J.A., Hurkens, C.A.J., Lenstra, J.K., Sevastianov, S.V., and D.B. Shmoys, "Short shop schedules," *Operations Research*, 45, 288-294, (1997).
42. Wu, C.C. and W.C. Lee, "Scheduling linear deteriorating jobs to minimize makespan with an availability constraint on a single machine," *Information Processing Letters*, 87, 89-93, (2003).
43. Wu, C.C., Y.R. Shiau and W.C. Lee, "Single-machine group scheduling problems with deterioration consideration," *Computers and Operations Research*, 35, 1652-1659, (2008).
44. Wu, C.C., Y.R., Shiau, L.H., Lee and W.C. Lee, "Scheduling deteriorating jobs to minimize the makespan on a single machine," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 44, 1230-1236, (2009).
45. Yang H., Y.Y., Ye, and J.W. Zhang, "An approximation algorithm for scheduling two parallel machines with capacity constraints," *Discrete Applied Mathematics*, 130, 449-467, (2003).
46. Yang, Y., D.-Z., Wang, D.-W., Wang, W.H., Ip and H.-F. Wang, "Single machine group scheduling problems with the effects of deterioration and learning," *Acta Automatica Sinica*, 35, 1290-1295, (2009).
47. Zhao, C.L. and H.Y. Tang, "Single machine scheduling problems with deteriorating jobs," *Applied Mathematics and Computation*, 161, 865-874, (2005).
48. Zhu, V.C.Y., L.Y., Sun, L.H., Sun and X.H. Li, "Single-machine scheduling time-dependent jobs with resource-dependent ready times," *Computers & Industrial Engineering*, 58, 84-87, (2010).